Méthode de NEWTON

[ROUVIÈRE, p 152]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. Alors :

1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in I = [a-\alpha, a+\alpha]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
a une convergence quadratique vers a dans I, où $a \in]c,d[$ est l'unique réel sur $]c,d[$ tel que $f(a) = 0$.
2. Si de plus $f'' > 0$ sur $]a,d]$, l'intervalle $]a,d]$ est F-stable et pour tout $x_0 \in]a,d]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante avec :
$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f(a)}(x_n - a)^2 \ \text{ lorque } \ n \to +\infty$$

DÉVELOPPEMENT :

1. La fonction f étant continue sur $[c,d]$ et croissant strictement de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$, donc s'annule en un unique point $a \in]c,d[$.

Comme $f(a) = 0$, on a, pour $x \in [c,d]$:
$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de TAYLOR-LAGRANGE appliqué sur $[a,x]$ donne l'existence d'un $z \in]a,x[$ tel que $f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2}f''(z)$. Ainsi, on a pour $x \in [c,d]$:
$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

En prenant la constante $C \in \mathbb{R}$ définie par :
$$C = \frac{\max_{x\in[c,d]}|f''(x)|}{2\min_{x\in[c,d]} f'(x)}$$

On obtient, pour $x \in [c,d]$:
$$|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $C\alpha < 1$ et $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$. Alors pour $x \in I$, on a $|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ d'où la F-stabilité de I. Ainsi, en prenant $x_0 \in I$, on a $x_n \in I$ pour $n \geq 0$ et
$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$$

d'où :
$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2n} \leq (\underbrace{C\alpha}_{<1})^{2n}$$

d'où le résultat.

2. Pour $a \leq x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où :
$$F(x) = x - \underbrace{\frac{f(x)}{f'(x)}}_{\geq 0} \leq x$$
avec inégalité stricte si $x > a$. De plus, par le premier point, on a :
$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$$
avec inégalité stricte si $x > a$ (car $f'' > 0$ sur $[c, d]$).

Ainsi, l'intervalle $I = [a, d]$ est F-stable et pour $a < x_0 \leq d$, les itérés x_n vérifient aussi $a < x_n \leq d$ et forment une suite strictement décroissante (si $x_0 = a$, la suite est constante). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite ℓ vérifiant $F(\ell) = \ell$ donc $f(\ell) = 0$ et donc $\ell = a$. De plus, si $a < x_0 \leq d$, on a $x_n > a$ pour tout n et :
$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$
avec $a < z_n < x_n$. La fraction tend donc vers $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$ d'où l'équivalent souhaité.

Remarques :

- Le développement est relativement court si maîtrisé : on n'hésitera pas à rendre le développement le plus clair possible, quitte à détailler.
- Il faut schématiser ce que l'on fait.
- Cette méthode est généralisable en dimension supérieure : de façon analogue, on "remplace" la dérivée par le jacobien (il faut avoir un exemple clair en tête pour la dimension 2 par exemple).